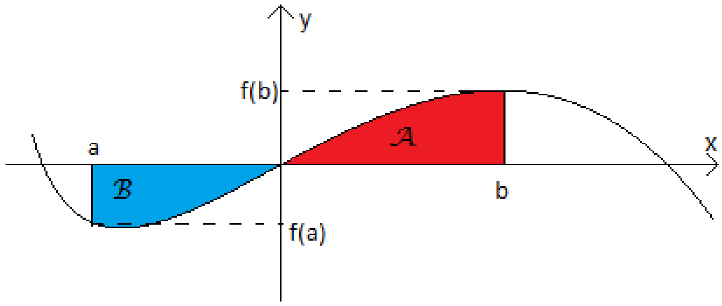
Intégrales et Primitives

I. Généralités sur les intégrales

Définition

Soit $f \in \mathcal{C}°([a,b])$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$. L'intégrale ($\int_a^b f(x)dx$) est l'aire du domaine délimité par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation x = a et x = b.



$$\int_a^b f(x)dx = A - B$$

(i) Si f est une fonction continue, positive ou nulle sur [a,b] alors, $\int_a^b f(x)dx \geq 0$

(ii) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

(iii) Si $\forall x \in [a,b]$ $alors$ $f(x) \leq g(x), \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)$

(iv) Relation de Chasles : $\forall c \in [a,b], \int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^b f$

Propriétés

Dans toute cette partie, on prend : $(f,g) \in \mathcal{C}°([a,b])^2$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b$

(i) $\int_a^a f(x)dx = 0$

(ii) Linéarité : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (f(x) + \lambda.g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \lambda.\int_a^b g(x)dx$

(iii) Soit f une fonction continue sur [-a,a], $a \geq 0$, si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

(iv) Soit f une fonction continue sur [-a,a], $a \geq 0$, si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

Inégalité de la moyenne : S'il existe m et M réels tels que pour $\forall \mathrm{x} \in [\mathrm{a};\mathrm{b}], \mathrm{m} \leq \mathrm{f(x)} \leq \mathrm{M}$, donc d'après le (iii) de la définition, on obtient :

$\mathrm{m}.(\mathrm{b}-\mathrm{a}) \leq \int_\mathrm{a}^\mathrm{b} \mathrm{f(x)}.\mathrm{dx} \leq \mathrm{M}.(\mathrm{b}-\mathrm{a})$ car m et M sont des constantes.

Primitives :

Définition : Soient f et F des fonctions définies sur un intervalle [a,b].
On dit que F est une primitive de f si F est dérivable sur [a,b] et si F '= f.
Remarque : Une primitive est toujours définie à une constante près. En effet, la dérivée d'une constante est nulle.
Remarque : Il est très important de ne pas confondre intégrale et primitive. La primitive est une fonction qui nous permet de calculer une intégrale grâce aux bornes de celle-ci ($\int_{[\mathrm{a},\mathrm{b}]} \mathrm{f} = \mathrm{F(b)} - \mathrm{F(a)}$). F est la primitive et $\int_{[\mathrm{a},\mathrm{b}]} \mathrm{f}$ est l'intégrale. L'intégrale peut être une constante ou une fonction indépendante de la variable d'intégration alors que la primitive est une fonction.

Théorème : Soit g une fonction définie sur l'intervalle I et a∈I, la fonction G définie sur I par $G : x \longmapsto \int_a^x g(t)dt$ est la seule primitive qui s'annule en a.

II. Intégration par parties :

Soient $(f, g) \in \mathcal{C}^1([a, b])^2$

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = [f(x).g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x).g(x)dx$$

Ceci peut être facilement retrouvable grâce à la formule de la dérivée du produit :

$$(fg)' = f'g + fg' \Rightarrow fg' = (fg)' - f'g$$

III. Changement de variable :

Parfois, une résolution directe est impossible et il peut être judicieux de faire un changement de variable afin de retrouver une forme plus simple.

Formule du changement de variable :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x).dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big).\varphi'(t).dt$$

Cas particulier : Règles de Bioche

Si la forme différentielle $F(\cos x, \sin x)$ est invariable par le changement de $\begin{cases} x\ en - x\ on\ pose\ t = \cos x \\ x\ en\ \pi - x\ on\ pose\ t = \sin x \\ x\ en\ \pi + x\ on\ pose\ t = \tan x \end{cases}$

Sinon, on pose $t = \tan\frac{x}{2}$
Et on fait le changement de variable correspondant.
On est ainsi ramené à un calcul de primitive de fraction rationnelle.